# 4. CAMBIOS DE VARIABLES, INTEGRALES IMPROPIAS Y APLICACIONES

## 4.5. Ejercicios complementarios

**1.** Mediante un cambio de variables adecuado, calcula la integral de $f(x,y)=\sqrt{y^2-4x^2}$ sobre el recinto acotado $D$ limitado por las curvas $y-2x=-1$, $y+2x=-1$ e $y^2-4x^2=\frac{1}{4}$.

**2.** Halla el área de la región plana $D=\big\{(x,y)\,:\,(x^2+y^2)^2\le\sqrt{xy},\ x,y\ge 0\big\}$.

**3.** Calcula los volúmenes de los sólidos limitados por las siguientes superficies:

**(a)** $z=0$, $\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$ $(p,q>0)$ y $x^2+y^2=a^2$.

**(b)** $z=x^2+y^2$, $z=2(x^2+y^2)$, $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $x=2y$, $2x=y$, $x>0$ e $y>0$.

**(c)** $x^2+y^2=2x$, $z=0$ y $z=\frac{xy^2}{x^2+y^2}$.

**(d)** $y^2+z^2=-2(x-1)$ e $y^2+z^2=2(x+1)$.

**4.** Halla el volumen del sólido limitado por el plano $z=0$, el paraboloide $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ y el cilindro $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{2x}{a}$.

**5.** Halla el volumen del recinto interior al cilindro $(x-2)^2+y^2=1$ y limitado por el plano $z=1$ y por el paraboloide $x^2+y^2=z$.

**6.** Halla las siguientes integrales triples:

**(a)** $\iiint_D x\,dx\,dy\,dz$, donde $D$ es la región acotada del primer octante limitada por los planos $x=0$, $y=0$, $z=2$ y por el paraboloide $z=x^2+y^2$.

**(b)** $\iiint_V \sqrt{2-x^2-y^2}\,dx\,dy\,dz$, donde $V$ es el recinto acotado del semiespacio $z\ge 0$ limitado por las superficies $x^2+y^2+z=4$ y $z^2=2(x^2+y^2)$.

**(c)** $\iiint_V \left(x^2+y^2\right)^{3/2}\,dx\,dy\,dz$, donde $V$ es el recinto acotado por $x^2+y^2+z^2=z$.

**7.** Halla las siguientes integrales triples:

**(a)** $\iiint\limits_D \sqrt{|y|}\,dx\,dy\,dz$, con $D=\{(x,y,z)\ :\ x^2+y^2\le 2x\ ,\ 0\le z\le\sqrt{x^2+y^2}\}$.

**(b)** $\iiint\limits_D \left|x^2-z^2\right|\,dx\,dy\,dz$, con $D=\big\{(x,y,z)\,:\,x^2+z^2\le y\le 1\big\}$.

**8.** Calcula el volumen del sólido limitado por la superficie $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3x$, $a>0$.

**9.** Halla la integral de $f(x,y)=\frac{1}{(x^2+y^2)^p}$, $p>0$, sobre $S=\big\{(x,y)\,:\,x^2+y^2\ge 1\big\}$.

**10.** Halla la integral de $f(x,y,z)=\frac{1}{x^p y^q z^r}$, $p,q,r>0$, sobre $D=\{(x,y,z)\,:\,0\le x,y,z\le 1\}$.

**11.** Halla el volumen de los siguientes recintos:

**(a)** Sólido comprendido entre las superficies $z=0$ y $z=-2\ln\sqrt{x^2+y^2}$ y que contiene al punto $(0,0,1)$.

**(b)** $\Omega=\{(x,y,z)\ :\ 0<x^2+4y^2\le 4\ ,\ z^2\le(x^2+4y^2)\ln\frac{4}{x^2+4y^2}\ ,\ z\ge 0\}$

**12.** Halla el valor medio de la función $f(x,y)=y\sin xy$ en $D=[0,\pi]\times[0,\pi]$.

**13.** Halla la masa y el centro de gravedad de un arco de sinusoide (región limitada por la función $y=\sin x$ y el eje de abscisas entre $x=0$ y $x=\pi$) con densidad constante $\delta_0$.

**14.** Halla el centro de gravedad de la región acotada comprendida entre $y=x$ e $y=x^2$, si la densidad es $\delta(x,y)=x+y$.

**15.** Halla la masa y el centro de gravedad del cilindro $x^2+y^2\le 1$, $1\le z\le 2$, si la densidad es $\delta(x,y,z)=(x^2+y^2)z^2$.

### Soluciones y/o sugerencias a los ejercicios:

**1.** $\frac{7-3\ln 2}{72}$.
**2.** $\frac{1}{4}\beta(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.
**3.** **(a)** $\frac{\pi a^4(p+q)}{8pq}$; **(b)** $\frac{9a^4}{4}$; **(c)** $\frac{\pi}{6}$; **(d)** $2\pi$.
**4.** $\frac{3ab\pi}{2}$.
**5.** $\frac{7\pi}{2}$.
**6.** **(a)** $\frac{8\sqrt{2}}{15}$; **(b)** $\frac{\pi(128-15\pi)\sqrt{2}}{30}$; **(c)** $\frac{\pi^2}{512}$.
**7.** **(a)** $\frac{5\pi}{7}$; **(b)** $\frac{1}{3}$.
**8.** $\frac{\pi a^3}{3}$.
**9.** $I_p = \frac{\pi}{p-1}$, si $p > 1$, e $I_p = \infty$, si $0 < p \leq 1$.
**10.** $I(p,q,r) = \frac{1}{(1-p)(1-q)(1-r)}$, si $0 < p, q, r < 1$, y divergente en caso contrario.
**11.** **(a)** $\pi$; **(b)** $2\left(\frac{2\pi}{3}\right)^{3/2}$.
**12.** $\frac{\pi^2 - \sin \pi^2}{\pi^3}$.
**13.** $m = 2\delta_0$; $G\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$.
**14.** $m = \frac{3}{20}$; $G\left(\frac{11}{18}, \frac{65}{126}\right)$.
**15.** $m = \frac{7\pi}{6}$; $G\left(0, 0, \frac{45}{28}\right)$.